令和 5 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）

教　育　学　部

・試験開始までに下の（注意事項）をよく読んでください。ただし，この冊子を開いてはいけません。
・筆記用具は試験開始まで手にとってはいけません。

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図があったら，すぐに種類と枚数が以下のとおりであることを確かめた上で，受験番号を 4 枚すべてに記入してください。

　令和 5 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）
　令和 5 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 1）
　令和 5 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 2）
　令和 5 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 3）

2. 試験終了後，配布されたすべての用紙を回収します。
3. 配布された用紙が上記 1 と異なっているときや印刷が不鮮明なときには，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 各「試験問題・答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。
5. 解答を書ききれないときは，その問題が記載してある用紙の裏面を利用してもかまいません。その場合は，問題記載の面の右下方に「裏面使用」と記入してください。

受　験　番　号

令和 5 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学I・A・II・B その1）

問題 1

次の問いに答えよ。答えだけでなく，どのように考えたのか，途中の計算および説明も書け。

(1) n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2) $\triangle$ABC において，AB $=1$, AC $=3$, $\angle$BAC $=60^\circ$ とし，$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき， 線分 BD の長さを求めよ。また，$\sin\angle$ADB の値を求めよ。

(3) 1 次不定方程式 $273x+112y=21$ を満たす整数 $x,\ y$ の組の中で，y が正で最小となる組を求めよ。

解答例

(1) 与えられた等式を ① とおく。

[1] $n=1$ のとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k=(1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^1=0,\quad 1-(1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^1=0$ となり，① は成り立つ。

[2] $n=m$ のとき ① が成り立つ，すなわち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k=1-(m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^m$ と仮定する。$n=m+1$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{m}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k+(m+1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}=1-(m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^m+m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}=1-(m+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

となる。よって $n=m+1$ のときも ① が成り立つ。[1] [2] より，① はすべての自然数 n について成り立つ。

(2) $\triangle$ABC について，余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC}\\ &= 1^2+3^2-2\cdot1\cdot3\cos60^\circ=7\end{aligned}$$

である。よって，BC $=\sqrt{7}$ である。AD は $\angle$BAC の二等分線であるから，BD : DC $=$ AB : AC $=1:3$ なので，BD $=\dfrac{1}{4}$BC $=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ である。

次に $\triangle$ABD について，正弦定理より $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ADB}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin\angle\mathrm{BAD}}$ が成立するので，$\angle$BAD $=30^\circ$ であることに注意して $\dfrac{1}{\sin\angle\mathrm{ADB}}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{1}{2}}$ より $\sin\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ である。

(3) ユークリッドの互除法　$273=112\times2+49\ \longrightarrow\ 112=49\times2+14\ \longrightarrow\ 49=14\times3+7\ \longrightarrow\ 14=7\times2$　から，

$$\begin{aligned}7&=49-14\times3=49-(112-49\times2)\times3=49\times7-112\times3\\ &=(273-112\times2)\times7-112\times3=273\times7-112\times17\end{aligned}$$

より，$273\times21-112\times51=21$ が得られ，$x=21, y=-51$ が一つの解であることがわかる。他の解 x,y について，$273x+112y=21$，$273\times21-112\times51=21$ より $273(x-21)+112(y+51)=0$，すなわち $39(x-21)=-16(y+51)$ が得られる。$39=3\times13$ と $16=2^4$ は互いに素であるから，これより k を整数として，$x-21=-16k$，$y+51=39k$ と表される。$y=-51+39k$ が正となるのは，k が 2 以上の整数のときであるから，求めるものは $k=2$ のときで，このとき $x=-11,\ y=27$ となる。

（教育　数学I・A・II・B その1）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 2　xy 平面において放物線 $y = x^2$ を C とする。次の問いに答えよ。

(1) ある直線と C が 2 点 (α, α^2), (β, β^2) $(\alpha < \beta)$ で交わるとき，この直線と C で囲まれた部分の面積を A とする。A を定積分で表しそれを計算することにより，$A = \dfrac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ であることを示せ。

(2) 点 $\mathrm{P}(1, 1)$ における C の接線を l とする。P を通り l に垂直な直線と直線 $x = -1$ との交点を Q とし，さらに Q を通り l に平行な直線と C の交点のうち x 座標が負であるものを R とする。放物線 C と線分 PQ および線分 QR により囲まれた部分の面積を S とするとき，$S = \dfrac{10\sqrt{5}}{3} - 5$ であることを示せ。

解答例

(1) 2 点 (α, α^2), (β, β^2)　$(\alpha < \beta)$ を通る直線の方程式は $y - \alpha^2 = \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$ より $y = (\beta + \alpha)x - \beta\alpha$ である。この直線と C で囲まれた部分の面積 A は

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(\beta + \alpha)x - \beta\alpha - x^2\} dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{(\beta + \alpha)}{2}x^2 - \beta\alpha x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
&= -\frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{\beta + \alpha}{2}(\beta^2 - \alpha^2) - \beta\alpha(\beta - \alpha) \\
&= -\frac{1}{3}(\beta - \alpha)(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) + \frac{(\beta + \alpha)^2}{2}(\beta - \alpha) - \beta\alpha(\beta - \alpha) \\
&= \frac{(\beta - \alpha)}{6} \left\{ -2(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) + 3(\beta + \alpha)^2 - 6\beta\alpha \right\} \\
&= \frac{(\beta - \alpha)}{6}(\beta^2 - 2\beta\alpha + \alpha^2) \\
&= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3
\end{aligned}
$$

である。

(2) $y = x^2$ のとき $y' = 2x$ であるから，l の傾きは 2 となり l に垂直な直線の方程式は $y = -\dfrac{1}{2}(x - 1) + 1$ となる。これと $x = -1$ との交点 Q の座標は $(-1, 2)$ となり，Q を通り l に平行な直線の方程式は $y = 2(x + 1) + 2$, すなわち，$y = 2x + 4$ となる。したがって R の x 座標は，$x^2 = 2x + 4$ の負の解である $x = 1 - \sqrt{5}$ であるとわかる。(1) より C と直線 PQ により囲まれる部分の面積 T は，$T = \dfrac{1}{6}\{1 - (1 - \sqrt{5})\}^3 = \dfrac{5\sqrt{5}}{6}$ である。ところで，直線 PQ の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$
\mathrm{PQ} = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \{1 - (-1)\} = \sqrt{5},
$$

直線 QR の傾きは 2 であるから

$$
\mathrm{QR} = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \{-1 - (1 - \sqrt{5})\} = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 2) = 5 - 2\sqrt{5}
$$

となるので，$\angle\mathrm{PQR}$ は直角であることを考えて

$$
\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{QR} = \frac{1}{2}\sqrt{5}(5 - 2\sqrt{5}) = \frac{5\sqrt{5}}{2} - 5
$$

が得られる。これらより

$$
S = T + \triangle\mathrm{PQR} = \frac{5\sqrt{5}}{6} + \frac{5\sqrt{5}}{2} - 5 = \frac{10\sqrt{5}}{3} - 5
$$

と求められる。

問題 3　次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = 36,\quad a_{n+1} = 6{a_n}^6,\quad b_n = \log_6 a_n\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ それぞれの一般項を求めよ。

(2) $c_1 = 6,\quad c_{n+1} = \dfrac{n+3}{n+1}c_n + 1,\quad d_n = \dfrac{c_n}{(n+1)(n+2)}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{c_n\}, \{d_n\}$ それぞれの一般項を求めよ。

解答例

(1) $b_n = \log_6 a_n$ より，$n = 1$ のとき $b_1 = \log_6 a_1 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$ であり，数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式から

$$b_{n+1} = \log_6 a_{n+1} = \log_6 6a_n^6 = 1 + 6\log_6 a_n = 1 + 6b_n,$$

つまり，$b_{n+1} = 1 + 6b_n$ を得る。この漸化式は $\beta = 1 + 6\beta$ を満たす解 $\beta = -\dfrac{1}{5}$ を用いて，$b_{n+1} + \dfrac{1}{5} = 6\left(b_n + \dfrac{1}{5}\right)$ のように変形される。したがって，$b_1 = 2$ も用いれば $b_n + \dfrac{1}{5} = 6^{n-1}\left(b_1 + \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{11}{5}6^{n-1}$　となる。ゆえに数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n = \dfrac{11}{5}6^{n-1} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}(11 \cdot 6^{n-1} - 1)$　である。一方 $b_n = \log_6 a_n$ から $a_n = 6^{b_n}$ となるので，b_n をこれに代入すれば数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 6^{\frac{1}{5}(11 \cdot 6^{n-1} - 1)}$　であるとわかる。

(2) $d_n = \dfrac{c_n}{(n+1)(n+2)}$ より，$n = 1$ のとき $d_1 = \dfrac{c_1}{(1+1)(1+2)} = \dfrac{6}{2 \cdot 3} = 1$ であり，数列 $\{c_n\}$ の漸化式の両辺を $(n+2)(n+3)$ で割れば，

$$\frac{c_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

となるので，$d_{n+1} - d_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$ を得る。これより $n \geqq 2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n-1}(d_{k+1} - d_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

となるが，(左辺) $= d_n - d_1 = d_n - 1$, (右辺) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2}$ である。ゆえに $d_n = 1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{4n+5}{3(n+2)}$ が得られ，$n = 1$ のときもこれが成り立ち，$c_n = (n+1)(n+2) \cdot \dfrac{4n+5}{3(n+2)} = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{3}$ となる。

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計