令 和 4 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

問題用紙 (工学部 数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ)

1 (1) 方程式 $\log_2|x^2-3x+2|+\log_2|x^2-5x+6|=2\log_2(x-2)$ を解け。

(2) 複素数平面において，点 z が $|z|=2$ $(z \neq 2)$ で表される図形上を動くとき，複素数 $w=\dfrac{z+2}{z-2}$ で表される点 w は，どのような図形を描くか。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\sqrt{\sin^2 x+1}\,\sin 2x\,dx$ を求めよ。

2 座標平面上に原点Oと2点 $\mathrm{A}(1,0)$，$\mathrm{B}(-1,\sqrt{3})$ がある。線分 AB を $1:2$ に内分する点をCとする。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ向きの単位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ の成分表示をそれぞれ求めよ。

(2) 3点 P，Q，R があり，それらの位置ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=u\overrightarrow{e_3}$ であるとする。ただし s,t,u は正の実数である。この3点 P，Q，R が同一直線上にあるとき，u を s と t で表せ。

(3) (2) の3点 P，Q，R について，点 R が線分 PQ の中点であるとき，t,u をそれぞれ s で表せ。

3 a を実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y=xe^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) C の接線で，点 $(4,0)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2) C の接線で，点 $(a,0)$ を通るものが存在しないような a の値の範囲を求めよ。

(3) $a>4$ である任意の a に対し，C の接線で，点 $(a,0)$ を通り，接点の x 座標が1と2の間にあるものが存在することを示せ。

4 関数 $f(x)$ を $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)$ $(x>0)$ とする。また，数列 $\{I_n\}$ を次の式で定める。

$$I_n=\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log I_n=f(n)+f(n-1)+\cdots+f(2)+f(1)$ が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $f(x)$ の正負および増減を調べよ。また，正の整数 k に対して，不等式 $\displaystyle\int_k^{k+1}f(x)\,dx<f(k)$ が成り立つことを示せ。

(3) n を正の整数とする。このとき，不等式 $\displaystyle\int_1^{n+1}f(x)\,dx<\log I_n$ が成り立つことを示せ。

(4) n を正の整数とする。このとき $\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$ を求めよ。

(5) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{3}\,I_n>\frac{2}{3}\sqrt{2n+3}\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{n+1}$$

受 験 番 号

令和４年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその１ ）

1 (1) 与えられた方程式は $\log_2|(x-1)(x-2)| + \log_2|(x-2)(x-3)| = 2\log_2(x-2)$ である。真数は正であるから $x-2>0$ かつ $x \fallingdotseq 3$ である。$x-2>0$ のとき，$x-1>0$ であるので，$|(x-1)(x-2)| = (x-1)(x-2)$ である。

(i) $2<x<3$ のとき，$|(x-2)(x-3)| = (x-2)(3-x)$ より，与えられた方程式は

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)(x-2) + \log_2(x-2)(3-x) &= 2\log_2(x-2)\\ \log_2(x-1) + \log_2(x-2) + \log_2(x-2) + \log_2(3-x) &= 2\log_2(x-2)\\ \log_2(x-1) + \log_2(3-x) &= 0\\ \log_2(x-1)(3-x) &= \log_2 1\end{aligned}$$

となる。よって $(x-1)(3-x)=1$ から $(x-2)^2=0$ となり，$x=2$ を得るが，これは $2<x<3$ を満たさない。

(ii) $3<x$ のとき，$|(x-2)(x-3)| = (x-2)(x-3)$ より，与えられた方程式は

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)(x-2) + \log_2(x-2)(x-3) &= 2\log_2(x-2)\\ \log_2(x-1) + \log_2(x-3) &= 0\\ \log_2(x-1)(x-3) &= \log_2 1\end{aligned}$$

となる。よって $(x-1)(x-3)=1$ から $x^2-4x+2=0$ となり，$x=2\pm\sqrt{2}$ を得る。このうち，$3<x$ を満たすのは $x=2+\sqrt{2}$ である。

以上より，与えられた方程式の解は $x=2+\sqrt{2}$ である。

---

(2) $w = \dfrac{z+2}{z-2}$ の分母を払って整理すると

$$\begin{aligned}(z-2)w &= z+2\\ (w-1)z &= 2(w+1)\end{aligned}$$

である。ここで $w=1$ のときの上式の左辺は 0，右辺は 4 となり，等式が成立しないので，$w-1 \fallingdotseq 0$ である。両辺を $w-1$ で割ると

$$z = \frac{2(w+1)}{w-1}$$

を得る。$|z|=2$ であるから，$\left|\dfrac{2(w+1)}{w-1}\right| = 2$，よって $|w+1| = |w-1|$ である。

これを満たす点 w は，複素数平面の実軸上の 2 点 -1 と 1 から等距離にある点である。

よって，点 w は複素数平面の実軸上の 2 点 -1 と 1 を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

---

(3) $t=\sin^2 x+1$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx} = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ より，$dt = \sin 2x\,dx$ である。

また，x が $\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{3}{4}\pi$ まで変化するとき，t は 2 から $\dfrac{3}{2}$ まで変化するので，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{\sin^2 x+1}\,\sin 2x\,dx = \int_2^{\frac{3}{2}} \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_2^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

受 験 番 号

小　　計

数　　学 そ の １
工 学 部

令和４年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその２ ）

2

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ であるから，$\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

また，点 C は線分 AB を 1 : 2 に内分するので，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ である。

よって $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{2}{3}$ となるから，$\overrightarrow{e_3} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

(2) 異なる 3 点 P, Q, R が同一直線上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となる実数 k がある。$\overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，すなわち $u\overrightarrow{e_3} = (1-k)s\overrightarrow{e_1} + kt\overrightarrow{e_2}$ が成り立つ。これを成分で書くと，

$$u\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1-k)s(1,0) + kt\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる。$\overrightarrow{e_1} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{e_2} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$ で，$\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ は平行でないから，

$$\begin{cases} \dfrac{u}{2} = (1-k)s - \dfrac{kt}{2} & \cdots ① \\ \dfrac{\sqrt{3}u}{2} = \dfrac{\sqrt{3}kt}{2} & \cdots ② \end{cases}$$

である。② と $t > 0$ より $k = \dfrac{u}{t}$ であるから，①に代入して $u = 2\left(1 - \dfrac{u}{t}\right)s - u$ となり，これより $s + t > 0$ と合わせて，$u = \dfrac{st}{s+t}$ となる。

(3) R は線分 PQ の中点なので，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから，(2) における k の値は $\dfrac{1}{2}$ である。これを (2) の ①② に代入して整理すると

$$\begin{cases} u = s - \dfrac{1}{2}t \\ u = \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

となる。よって $u = \dfrac{1}{2}s$，$t = s$ が得られる。

受　験　番　号

小　　　計

数　　学 そ の 2
工　学　部

令和４年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその３ ）

3

(1) 接点を $\mathrm{P}(t, te^{-t})$ と置くと，$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ より P における接線の方程式は，

$$y - te^{-t} = (1-t)e^{-t}(x-t)$$

である。これが $(4, 0)$ を通るとき，

$$-te^{-t} = (1-t)(4-t)e^{-t}$$

なので，$e^{-t} > 0$ より，

$$-t = (1-t)(4-t)$$

となり，これを解いて

$$t = 2$$

である。したがって，求める接線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{e^2}(x-2) + \frac{2}{e^2}$$

である。

(2) (1) より曲線 C 上の点 (t, te^{-t}) を通る接線の方程式は，

$$y - te^{-t} = (1-t)e^{-t}(x-t)$$

である。これが $(a, 0)$ を通ることと

$$-te^{-t} = (1-t)e^{-t}(a-t)$$

が成り立つことは同値である。ここで $e^{-t} > 0$ より，上式の両辺を e^{-t} で割って整理すると

$$t^2 - at + a = 0$$

となる。よって，実数 t に対し，点 (t, te^{-t}) を接点とする C の接線が点 $(a, 0)$ を通る必要十分条件は，$t^2 - at + a = 0$ が成り立つことである。したがって，点 $(a, 0)$ を通る C の接線が存在する必要十分条件は，$t^2 - at + a = 0$ を満たす実数 t が存在することである。
t に関する 2 次方程式 $t^2 - at + a = 0$ が実数解をもたないためには，その判別式 $D = a^2 - 4a = a(a-4)$ が負であること，つまり $0 < a < 4$ であることが必要十分である。
以上より，点 $(a, 0)$ を通る C の接線が存在しないような a の範囲は $0 < a < 4$ である。

(3) (2) で述べたように，実数 t が $t^2 - at + a = 0$ を満たすとき，点 (t, te^{-t}) を接点とする C の接線は点 $(a, 0)$ を通る。$g(t) = t^2 - at + a$ と置くと，$g(t)$ は連続関数であり，$a > 4$ より

$$g(2) = 4 - 2a + a = 4 - a < 0$$

であり，

$$g(1) = 1 - a + a = 1 > 0$$

である。したがって，中間値の定理より，方程式 $g(t) = 0$ は $1 < t < 2$ を満たす解を持つから，$(a, 0)$ を通る曲線 C の接線で，接点の x 座標が 1 と 2 の間にあるものが存在する。

受　験　番　号

小　　　計

数　　学その３
工　学　部

4

(1) 対数の性質より，

$$\begin{aligned}\log I_n &= \log\frac{2n+1}{2n}+\log\frac{2n-1}{2n-2}+\cdots+\log\frac{5}{4}+\log\frac{3}{2}\\ &= \log\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{2\cdot 2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2\cdot 1}\right)\\ &= f(n)+f(n-1)+\cdots+f(2)+f(1)\end{aligned}$$

である。

(2) $x>0$ のとき，$1+\dfrac{1}{2x}>1$ であるから，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)>0$ である。また，$x>0$ において関数 $1+\dfrac{1}{2x}$ は常に減少し，e を底とする対数関数は常に増加することから，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)$ は常に減少する。

$f(x)$ が常に減少することから，$k\leqq x\leqq k+1$ において $f(x)\leqq f(k)$ であり，等号が成立するのは $x=k$ のときのみである。したがって，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx<\int_k^{k+1} f(k)\,dx=f(k)$$

が成り立つ。

(3) (2) の不等式について，$k=1,2,\ldots,n$ とおいて，それらの和をとれば，不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx<f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$

を得る。(1) より，$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\log I_n$ である。また，定積分の性質より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx=\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ である。よって，不等式 $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx<\log I_n$ を得る。

(4) 部分積分法を用いる。

$$\begin{aligned}\int_1^n \log\left(1+\frac{1}{2x}\right)dx &= \left[x\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]_1^n-\int_1^n x\cdot\frac{-1}{x(2x+1)}\,dx\\ &= n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\log\frac{3}{2}+\left[\frac{1}{2}\log(2x+1)\right]_1^n\\ &= n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\log\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log(2n+1)-\frac{1}{2}\log 3\end{aligned}$$

(5) (3) と (4) より，不等式 $(n+1)\log\left(1+\dfrac{1}{2(n+1)}\right)-\log\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\log(2n+3)-\dfrac{1}{2}\log 3<\log I_n$ を得る。

$-\dfrac{1}{2}\log 3$ を右辺に移項して，対数の性質を用いて整理すると

$$\log\left(\frac{2}{3}\sqrt{2n+3}\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}\right)<\log\left(\sqrt{3}I_n\right)$$

となる。自然対数の底 e は 1 より大きいので $\log\alpha<\log\beta$ のとき $\alpha<\beta$ が成り立つ。よって求める不等式が得られる。

受　験　番　号

小　　　計

数　　　学　そ　の　4
工　学　部