令和３年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその１ ）

1　(1)　$a>0,\ b>0$ および $a^2+b^2=1$ より，$0<a<1,\ 0<b<1$ である。対数の性質より $\log_a b^2=2\log_a b$, $\log_b ab=\log_b a+\log_b b=\log_b a+1$ である。また，底の変換公式より $\log_b a=\dfrac{\log_a a}{\log_a b}=\dfrac{1}{\log_a b}$ であるから，与えられた方程式は $2\log_a b-\dfrac{1}{\log_a b}-1=0$ である。

ここで $t=\log_a b$ とおくと，$0<a<1$ から $\log_a b$ の底は1より小さいので，$0<b<1$ より $t=\log_a b>\log_a 1=0$ である。t を用いると与えられた方程式は $2t-\dfrac{1}{t}-1=0$ と表されるが，$t\fallingdotseq 0$ より，この方程式は $2t^2-t-1=0$ と同値である。左辺を因数分解すると $(2t+1)(t-1)=0$ であるから，$t=-\dfrac{1}{2},1$ である。これと $t>0$ より $t=1$ である。よって，$\log_a b=1$ であるから $a=b$ である。

したがって，$a^2+b^2=1$ より $2a^2=1$ であるから，$a>0$ に注意すると $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。以上から $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。

---

(2)　問題の等式を ① とおく。

[1] $n=1$ のとき (左辺) $=\dfrac{1}{2}$, (右辺) $=\dfrac{1}{2}$ であり，等式 ① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき等式 ① が成り立つ，すなわち，

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}\qquad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，等式 ② より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}&=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}\\&=1-\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!}\\&=1-\frac{1}{(k+2)!}\end{aligned}$$

である。よって，$n=k+1$ のときも等式 ① が成り立つ。
[1], [2] よりすべての自然数 n について等式 ① は成り立つ。

---

(3)　$\omega=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ とおく。このとき，$\beta=\alpha\omega,\ \gamma=\alpha\omega^2,\ \omega^3=1$ であるから

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\omega}+\frac{1}{\alpha\omega^2}=\frac{1}{\alpha}+\frac{\omega^2}{\alpha}+\frac{\omega}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}(1+\omega+\omega^2)$$

である。ここで $1+\omega+\omega^2=0$ であるから，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$ である。

数　　学 そ の 1
工 学 部

受 験 番 号

小　　計

2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = kt\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

また，$\mathrm{BR} : \mathrm{RP} = u : (1-u)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = u\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = us\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{0}$ でなく，また平行でないから

$$\begin{cases} us = kt \\ 1-u = k(1-t) \end{cases}$$

を得る。$u = \dfrac{tk}{s}$ から $1 - \dfrac{tk}{s} = k(1-t)$ であり，これを整理すると $s = (s+t-st)k$ となる。

ここで $s+t-st = 1-(1-s)(1-t) > 0$ より

$$k = \frac{s}{s+t-st}$$

である。

(2) R が線分 OP を直径とする円周上にあるとき，円周角の定理より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ である。このことと $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} &= (t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot (s\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= ts\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} - (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= sta^2 - (1-t)b^2 \end{aligned}$$

であるから，$s = \dfrac{(1-t)b^2}{ta^2}$ を得る。したがって，(1) より

$$k = \frac{\dfrac{(1-t)b^2}{ta^2}}{\dfrac{(1-t)b^2}{ta^2} + t - \dfrac{(1-t)b^2}{ta^2}t} = \frac{(1-t)b^2}{t^2a^2 + (1-t)^2b^2}$$

である。

(3) R が G と一致するとき，Q は線分 AB の中点である。よって，$t = \dfrac{1}{2}$ である。

また，R が G と一致するとき，R は線分 OQ を $2:1$ に内分する点であるから，$k = \dfrac{2}{3}$ である。

したがって，(2) より

$$\frac{2}{3} = \frac{\dfrac{1}{2}b^2}{\dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{1}{4}b^2} = \frac{2b^2}{a^2+b^2}$$

を得る。これを整理すると $a^2 = 2b^2$, よって $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$ である。

ここで $a, b > 0$ より $\dfrac{a}{b} > 0$ であるから，$\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$ である。

受　験　番　号

小　　　計

令和３年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその３ ）

3

(1) $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+9}{x^2-3x+3}=\dfrac{2(x^2-4x)+9}{x^2-3x+3}=\dfrac{2(x-2)^2+1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ である。

したがって，分母と分子は共に正の値をとるので，$f(x)>0$ である。

(2) (1) より

$$\begin{aligned}S(k) &= \int_k^{k+1}\left(2-\frac{2x-3}{x^2-3x+3}\right)dx\\ &= \int_k^{k+1}\left(2-\frac{(x^2-3x+3)'}{x^2-3x+3}\right)dx\\ &= \Big[2x-\log(x^2-3x+3)\Big]_k^{k+1}\\ &= 2-\left\{\log(k^2-k+1)-\log(k^2-3k+3)\right\}\\ &= 2+\log(k^2-3k+3)-\log(k^2-k+1)\end{aligned}$$

である。

(3) $S(k)$ の導関数は

$$\frac{dS}{dk}=\frac{2k-3}{k^2-3k+3}-\frac{2k-1}{k^2-k+1}=\frac{2k^2-4k}{(k^2-3k+3)(k^2-k+1)}=\frac{2k(k-2)}{(k^2-3k+3)(k^2-k+1)}$$

である。$\dfrac{dS}{dk}=0$ となる k の値は $k=0,2$ であり，分母が正の値をとることに注意すると，$S(k)$ の増減表は次のようになる。

k	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$\frac{dS}{dk}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(k)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，$S(k)$ の極大値は $S(0)=2+\log 3$ である。ここで

$$\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\left(2+\log\frac{k^2-3k+3}{k^2-k+1}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(2+\log\frac{1-\frac{3}{k}+\frac{3}{k^2}}{1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}\right)=2+\log 1=2<S(0)$$

である。よって，$S(k)$ の最大値は $S(0)=2+\log 3$ である。

受　験　番　号

小　　計

4

(1) 正三角形の一辺の長さを ℓ とする。このとき，$A=\dfrac{1}{2}\cdot\ell\cdot\dfrac{\sqrt{3}\,\ell}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ であるから，$\ell^2=\dfrac{4}{\sqrt{3}}A$ である。

ここで $\ell>0$ であるから，$\ell=2\sqrt{\dfrac{A}{\sqrt{3}}}$ である。さらに $L_3=3\ell$ であるから，$L_3=2\sqrt{3\sqrt{3}\,A}$ である。

(2) 正 n 角形に外接する円の中心と各頂点を結ぶ線分により，正 n 角形を n 個の二等辺三角形に分割して考える。正 n 角形の一辺の長さを ℓ とすると，各二等辺三角形の底辺の長さは ℓ, 高さは $\dfrac{\ell}{2\tan x_n}$ であるから

$$A=n\left\{\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\frac{\ell}{2\tan x_n}\right\}=\frac{n}{4\tan x_n}\ell^2$$

を得る。$\ell>0$ であるから $\ell=2\sqrt{\dfrac{A\tan x_n}{n}}$ である。$L_n=n\ell$ であるから

$$L_n=2\sqrt{nA\tan x_n}=2\sqrt{\frac{\pi A\tan x_n}{x_n}}$$

である。

(3) $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{(x\cos x)^2}$ である。

ここで $g(x)=x-\sin x\cos x$ とおく。$g(x)=x-\dfrac{\sin 2x}{2}$ であるから，$g'(x)=1-\cos 2x$ である。

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{3}$ において $g'(x)>0$ であるから，この区間で $g(x)$ はつねに増加する。

また，$g(0)=0$ であるから $0<x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において，$g(x)>0$ である。

上で示したことより，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x\cos x)^2}>0$ であるから，$f(x)$ はつねに増加する。$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ であり，

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

であるから，$y=f(x)$ のとり得る値の範囲は $1<y\leqq\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ である。

(4) まず，L を A を用いて表す。面積が A である円の半径を r とおくと

$$\begin{cases}A=\pi r^2\\ L=2\pi r\end{cases}$$

を得る。これより，$L=2\sqrt{\pi A}$ である。

さて，4 以上の自然数 n に対して，$0<x_n<x_3=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，(3) より $1<\dfrac{\tan x_n}{x_n}<\dfrac{\tan x_3}{x_3}$ である。

よって，次の不等式を得る。

$$L=2\sqrt{\pi A}<L_n=2\sqrt{\pi A\cdot\frac{\tan x_n}{x_n}}<L_3=2\sqrt{\pi A\cdot\frac{\tan x_3}{x_3}}$$

したがって，第１項 $L=2\sqrt{\pi A}$ が最小の項であり，第２項 $L_3=2\sqrt{3\sqrt{3}\,A}$ が最大の項である。

数　　学　そ　の　４
工　学　部

受　験　番　号

小　　　計